Über das Unendliche[1].

Von

David Hilbert in Göttingen.

Weierstraß hat der mathematischen Analysis durch seine mit meisterhafter Schärfe gehandhabte Kritik eine feste Grundlage geschaffen. Indem er unter anderem die Begriffe Minimum, Funktion, Differentialquotient klärte, hat er die der Infinitesimalrechnung noch anhaftenden Mängel beseitigt, sie von allen verschwommenen Vorstellungen über das Infinitesimale gereinigt und die dabei aus dem Begriff des Infinitesimalen entspringenden Schwierigkeiten endgültig überwunden. Wenn heute in Verfolgung der Schlußweisen, die auf dem Begriff der Irrationalzahl und überhaupt des Limes beruhen, in der Analysis volle Übereinstimmung und Sicherheit herrscht und in den verwickeltsten Fragen, die die Theorie der Differential- und Integralgleichungen betreffen, trotz der kühnsten und mannigfaltigsten Kombinationen unter Anwendung von Über-, Neben- und Durcheinander-Häufung der Limites doch Einhelligkeit aller Ergebnisse statthat, so ist dies wesentlich ein Verdienst der wissenschaftlichen Tätigkeit von Weierstraß.

Und dennoch hat mit der Weierstraßschen Begründung der Infinitesimalrechnung die Diskussion über die Grundlagen der Analysis noch nicht ihren Abschluß gefunden.

Der Grund hierfür liegt darin, daß die Bedeutung des *Unendlichen* für die Mathematik noch nicht restlos geklärt worden war. Zwar das Unendlichkleine und das Unendlichgroße ist in der Weierstraßschen Analysis eliminiert, indem die dies betreffenden Aussagen auf Beziehungen zwischen endlichen Größen zurückgeführt werden. Aber das Unendliche tritt noch immer auf in den unendlichen Zahlenfolgen, welche die reellen

---

[1]) Vortrag, gehalten am 4. Juni 1925 gelegentlich einer zur Ehrung des Andenkens an Weierstraß von der Westfälischen Mathematischen Gesellschaft veranstalteten Mathematiker-Zusammenkunft in Münster i. W.

Zahlen definieren, und weiter noch in dem Begriff des Systems der reellen Zahlen, welches ganz so wie eine fertig und abgeschlossen vorliegende Gesamtheit aufgefaßt wird.

Die Formen des logischen Schließens, in denen diese Auffassung zum Ausdruck kommt — nämlich, wenn man z. B. handelt von *allen* reellen Zahlen mit einer gewissen Eigenschaft oder davon, daß es reelle Zahlen von einer gewissen Eigenschaft *gibt*, — diese werden gerade in der Weierstraßschen Begründung der Analysis in ganz unbeschränktem Maß in Anspruch genommen und immer wiederholt angewandt.

Dadurch konnte in die Weierstraßsche Theorie doch wieder das Unendliche in verdeckter Form hineinspielen, ohne von der Schärfe der Weierstraßschen Kritik getroffen zu werden, und daraus folgt, daß es das *Problem des Unendlichen* ist, das in dem angedeuteten Sinne abschließend zu klären uns noch not tut. Und so wie bei den Grenzprozessen der Infinitesimalrechnung das Unendliche im Sinne des Unendlichkleinen und des Unendlichgroßen sich als eine bloße Redensart erweisen ließ, so müssen wir auch das Unendliche im Sinne der unendlichen Gesamtheit, wo wir es jetzt noch in den Schlußweisen vorfinden, als etwas bloß Scheinbares erkennen. Und so wie das Operieren mit dem Unendlichkleinen durch Prozesse im Endlichen ersetzt wurde, welche ganz dasselbe leisten und zu ganz denselben eleganten formalen Beziehungen führen, so müssen überhaupt die Schlußweisen mit dem Unendlichen durch endliche Prozesse ersetzt werden, die gerade dasselbe leisten, d. h. dieselben Beweisgänge und dieselben Methoden der Gewinnung von Formeln und Sätzen ermöglichen.

Dies ist nun die Absicht meiner Theorie. Sie hat zum Ziel, die definitive Sicherheit der mathematischen Methode herzustellen, zu welcher die kritische Periode der Infinitesimalrechnung noch nicht gelangt ist; sie soll also zur Vollendung bringen, was Weierstraß mit seiner Grundlegung der Analysis angestrebt und wozu er den einen notwendigen und wesentlichen Schritt getan hat.

Aber was die Frage der Klärung des Unendlichkeitsbegriffes betrifft, so kommt dabei noch ein allgemeinerer Gesichtspunkt in Betracht. Die mathematische Literatur findet sich, wenn man darauf acht gibt, stark durchflutet von Ungereimtheiten und Gedankenlosigkeiten, die meist durch das Unendliche verschuldet sind. So wenn z. B. im Sinne einer einschränkenden Bedingung die Forderung betont wird, daß in der strengen Mathematik nur eine *endliche* Anzahl von Schlüssen in einem Beweise zulässig sei — als ob es schon irgend jemandem einmal gelungen wäre, unendlich viele Schlüsse auszuführen.

Auch alte Einwendungen, die man längst abgetan glaubte, treten in neuem Gewande wieder auf. So wird neuerdings etwa dies ausgeführt:

Wenn auch die Einführung eines Begriffes ohne Gefahr d. h., ohne Widersprüche zu erhalten, möglich sei und dies erwiesen werden könne, so stehe damit noch nicht ihre Berechtigung fest. Ist dies nicht genau der Einwand, den man seinerzeit gegen die komplex-imaginären Zahlen geltend machte, indem man sagte: freilich könne man zwar durch sie keine Widersprüche erhalten; aber ihre Einführung sei dennoch nicht berechtigt; denn die imaginären Größen existierten doch nicht? Nein, wenn über den Nachweis der Widerspruchsfreiheit hinaus noch die Frage der Berechtigung zu einer Maßnahme einen Sinn haben soll, so ist es doch nur die, ob die Maßnahme von einem entsprechenden Erfolge begleitet ist. In der Tat, der Erfolg ist notwendig; er ist auch hier die höchste Instanz, der sich jedermann beugt.

Ein anderer Autor scheint Widersprüche — Gespenstern gleich — auch dann zu erblicken, wenn überhaupt niemand etwas behauptet hat, nämlich in der konkreten Sinnenwelt selbst, deren „widerspruchsfreies Funktionieren" als eine besondere Voraussetzung angesehen wird. Ich habe allerdings geglaubt, daß nur Aussagen und Annahmen, soweit sie durch Schlüsse auf Aussagen führen, einander widersprechen könnten, und mir erscheint die Auffassung, als könnten die Tatsachen und Ereignisse selbst miteinander in Widerspruch geraten, als das Musterbeispiel einer Gedankenlosigkeit.

Durch diese Bemerkungen wollte ich nur dartun, daß die endgültige Aufklärung über das *Wesen des Unendlichen* weit über den Bereich spezieller fachwissenschaftlicher Interessen vielmehr zur *Ehre des menschlichen Verstandes* selbst notwendig geworden ist.

Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das *Gemüt* der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer *Begriff* so der *Aufklärung* bedürftig.

Wenn wir uns nun dieser Aufgabe, das Wesen des Unendlichen aufzuklären, zuwenden, so müssen wir uns in aller Kürze vergegenwärtigen, welche inhaltliche Bedeutung dem Unendlichen in der Wirklichkeit zukommt; wir sehen zunächst, was wir aus der Physik hierüber erfahren.

Der erste naive Eindruck von dem Naturgeschehen und der Materie ist der des Stetigen, des Kontinuierlichen. Haben wir ein Stück Metall oder ein Flüssigkeitsvolumen, so drängt sich uns die Vorstellung auf, daß sie unbegrenzt teilbar seien, daß ein noch so kleines Stück von ihnen immer wieder dieselben Eigenschaften habe. Aber überall, wo man die Methoden der Forschung in der Physik der Materie genügend verfeinerte, stieß man auf Grenzen für die Teilbarkeit, die nicht an der Unzulänglichkeit unserer Versuche, sondern in der Natur der Sache liegen, so daß man geradezu die Tendenz der modernen Wissenschaft als eine Emanzipation von dem Unendlichkleinen auffassen könnte und daß man jetzt an Stelle des alten Leitsatzes: „natura non facit saltus“ das Gegenteil „die Natur macht Sprünge“ behaupten könnte.

Bekanntlich ist alle Materie aus kleinen Bausteinen, den *Atomen* zusammengesetzt, durch deren Kombination und Verbindung die ganze Mannigfaltigkeit der makroskopischen Stoffe entsteht.

Bei der Atomistik der Materie blieb aber die Physik nicht stehen. Neben sie trat gegen Ende des vorigen Jahrhunderts die zunächst viel fremdartiger wirkende Atomistik der Elektrizität. Während bis dahin die Elektrizität als ein Fluidum galt und das Vorbild eines kontinuierlich wirkenden Agens war, so erwies sich jetzt auch sie aufgebaut aus positiven und negativen *Elektronen.*

Außer Materie und Elektrizität gibt es in der Physik noch ein anderes Reales, für das ebenfalls das Gesetz der Erhaltung gilt, nämlich die Energie. Nun selbst die Energie läßt, wie heute feststeht, die unendliche Zerteilung nicht schlechthin und uneingeschränkt zu; Planck entdeckte die *Energiequanten.*

Und das Fazit ist jedenfalls, daß ein homogenes Kontinuum, welches die fortgesetzte Teilbarkeit zuließe, und somit das Unendliche im Kleinen realisieren würde, in der Wirklichkeit nirgends angetroffen wird. Die unendliche Teilbarkeit eines Kontinuums ist nur eine in Gedanken vorhandene Operation, nur eine Idee, die durch unsere Beobachtungen der Natur und die Erfahrungen der Physik und Chemie widerlegt wird.

Die zweite Stelle, an der uns in der Natur die Frage nach der Unendlichkeit entgegentritt, treffen wir bei der Betrachtung der Welt als Ganzes. Hier haben wir die Ausdehnung der Welt zu untersuchen, ob es in ihr ein Unendlichgroßes gibt.

Die Meinung von der Unendlichkeit der Welt war lange Zeit die herrschende; bis zu Kant und auch weiterhin noch hegte man an der Unendlichkeit des Raumes überhaupt keinen Zweifel.

Hier ist es wieder die moderne Wissenschaft, insbesondere die Astronomie, die diese Frage von neuem aufrollt und sie nicht durch das unzulängliche Hilfsmittel metaphysischer Spekulation, sondern durch Gründe, die sich auf die Erfahrung stützen und auf der Anwendung von Naturgesetzen beruhen, zu entscheiden sucht. Und es haben sich schwerwiegende Einwände gegen die Unendlichkeit herausgestellt. Zur Annahme der Unendlichkeit des Raumes führt mit Notwendigkeit die *Euklidische* Geometrie. Nun ist zwar die Euklidische Geometrie ein in sich widerspruchsfreies Gebäude und Begriffssystem; daraus folgt aber noch nicht, daß sie in der Wirklichkeit Gültigkeit besitzt. Ob dies der Fall ist, kann allein die Beobachtung und Erfahrung entscheiden. Bei dem Versuche, die Unendlichkeit des Raumes spekulativ zu erweisen, liefen auch offenbare Irrtümer unter. Aus der Tatsache, daß außerhalb eines Raumstückes immer wieder noch Raum vorhanden ist, folgt nur die Unbegrenztheit des Raumes, keineswegs aber seine Unendlichkeit. Unbegrenztheit und Endlichkeit aber schließen einander nicht aus. Die mathematische Forschung liefert in der sogenannten *elliptischen* Geometrie das natürliche Modell der endlichen Welt. Und das Aufgeben der Euklidischen Geometrie ist heute nicht mehr bloß eine rein mathematische oder philosophische Spekulation, sondern wir sind auch von einer anderen Seite dazu gelangt, die ursprünglich gar nichts mit der Frage der Endlichkeit der Welt zu schaffen hatte. Einstein hat die Notwendigkeit gezeigt, von der Euklidischen Geometrie abzugehen. Auf Grund seiner Gravitationstheorie nimmt er auch die kosmologischen Fragen in Angriff und zeigt die Möglichkeit einer endlichen Welt, und alle von den Astronomen gefundenen Resultate sind auch mit der Annahme der elliptischen Welt durchaus verträglich.

Die Endlichkeit des Wirklichen haben wir nun in zwei Richtungen festgestellt: nach dem Unendlichkleinen und dem Unendlichgroßen. Dennoch könnte es sehr wohl zutreffen, daß das Unendliche *in unserem Denken* einen wohlberechtigten Platz hat und die Rolle eines unentbehrlichen Begriffes einnimmt. Wir wollen zusehen, wie es damit in der mathematischen Wissenschaft bestellt ist und zunächst das reinste und naivste Kind des menschlichen Geistes, die Zahlentheorie, befragen. Nehmen wir hier aus der reichen Mannigfaltigkeit von elementaren Formeln irgendeine heraus, z. B. die Formel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Da wir darin für n irgendeine ganze Zahl einsetzen dürfen, z. B. $n = 2$ oder $n = 5$, so enthält diese Formel *unendlichviele* Aussagen, und dies ist offenbar das Wesentliche an ihr, wodurch sie erst die Lösung eines arithmetischen Problems darstellt und einen eigentlichen Beweisgedanken erforderlich macht, während die speziellen Zahlengleichungen

$$1^2 + 2^2 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11$$

sich durch Ausrechnen verifizieren lassen und daher einzeln für sich kein wesentliches Interesse bieten.

Eine völlig andere, ganz eigenartige Deutung und prinzipielle Erfassung des Unendlichkeitsbegriffes lernen wir an der Hand der so überaus wichtigen und fruchtbaren Methode *der idealen Elemente* kennen.

Schon in der elementaren Geometrie der Ebene findet die Methode der idealen Elemente ihre Anwendung. Hier sind ursprünglich die Punkte und Geraden der Ebene allein die realen, wirklich existierenden Gegenstände. Für diese gilt unter anderem das Axiom der Verknüpfung: Durch zwei Punkte geht immer eine und nur eine Gerade. Hieraus ergibt sich als Folgerung, daß zwei Gerade sich höchstens in einem Punkte schneiden. Es gilt jedoch nicht der Satz, daß zwei Gerade sich immer in einem Punkte schneiden; die zwei Geraden können vielmehr auch einander parallel sein. Es ist aber bekanntlich durch Einführung idealer Elemente, nämlich der unendlich fernen Punkte und einer unendlich fernen Geraden zu erreichen, daß der Satz, wonach zwei Geraden sich immer in einem und nur einem Punkte schneiden, allgemein gültig wird.

Die idealen „unendlichfernen" Elemente bringen den Vorteil, das System der Verknüpfungsgesetze so einfach und übersichtlich zu machen, wie nur irgend möglich. Wegen der Symmetrie zwischen Punkt und Gerade entsteht daraus bekanntlich das so fruchtbare Dualitätsprinzip der Geometrie.

Die gewöhnlichen *komplex-imaginären* Größen der Algebra sind ebenfalls ein Beispiel für den Gebrauch idealer Elemente; sie dienen hier zur Vereinfachung der Sätze über die Existenz und Anzahl der Wurzeln einer Gleichung.

Wie in der Geometrie unendlichviele Geraden, nämlich die einander Parallelen zur Definition eines idealen Punktes verwandt werden, so werden in der höheren Arithmetik gewisse Systeme von unendlichvielen Zahlen zu einem *Zahlenideal* zusammengefaßt, und zwar besteht hierin wohl die genialste Verwendung des Prinzips der idealen Elemente. Ist dies innerhalb eines algebraischen Zahlenkörpers allgemein geschehen, so finden wir darin wieder die einfachen und wohlbekannten Teilbarkeitsgesetze wieder, wie sie für die gewöhnlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . gelten. Hier sind wir schon in das Gebiet der höheren Arithmetik geraten.

Wir kommen nun zur Analysis, diesem kunstvollsten und am feinsten verzweigten Gebilde der mathematischen Wissenschaft. Sie wissen, welch maßgebende Rolle das Unendliche dort spielt, wie die mathematische Analysis gewissermaßen eine einzige Symphonie des Unendlichen ist.

Die in der Infinitesimalrechnung erzielten gewaltigen Fortschritte beruhen größtenteils auf dem Operieren mit mathematischen Systemen von unendlichvielen Elementen. Da es nun sehr nahe lag, unendlich mit „sehr groß" zu identifizieren, so entstanden bald Unstimmigkeiten, die sogenannten Paradoxien der Infinitesimalrechnung, die zum Teil schon im Altertum den Sophisten bekannt waren. Es war eine grundlegende Erkenntnis, daß viele für das Endliche gültigen Sätze, z. B. der Teil ist kleiner als das Ganze, Existenz des Minimums und des Maximums, Vertauschbarkeit der Reihen-folge der Summanden oder Faktoren, nicht unmittelbar auf das Unendliche übertragen werden dürfen. Ich erwähnte schon zu Beginn meines Vortrages, daß namentlich durch den Scharfsinn von Weierstraß diese Fragen volle Aufklärung erhalten haben, und heute ist die Analysis *in ihrem* Bereiche eine unfehlbare Anweisung und zugleich ein praktisches Instrument zum Gebrauch des Unendlichen geworden.

Aber die Analysis allein führt uns noch nicht zu der tiefsten Einsicht in das Wesen des Unendlichen. Diese wird uns vielmehr erst durch eine Disziplin vermittelt, die der allgemeinen philosophischen Betrachtungsweise näher steht und die berufen war, den ganzen Fragenkomplex in betreff des Unendlichen in ein neues Licht zu stellen. Diese Disziplin ist die Mengenlehre, deren Schöpfer Georg Cantor war, und zwar kommt hier für uns allein in Betracht das, was das wahrhaft Einzigartige und Originale, den eigentlichen Kern der Cantorschen Lehre ausmacht, nämlich seine Theorie *der transfiniten Zahlen*; diese erscheint mir als die bewundernswerteste Blüte mathematischen Geistes und überhaupt eine der höchsten Leistungen rein verstandesmäßiger menschlicher Tätigkeit. Was hat es nun damit für eine Bewandtnis?

Will man in Kürze die neue Auffassung des Unendlichen, der Cantor Eingang verschafft hat, charakterisieren, so könnte man wohl sagen: in der Analysis haben wir es nur mit dem Unendlichkleinen und dem Unendlichengroßen als Limesbegriff, als etwas Werdendem, Entstehendem, Erzeugtem, d. h., wie man sagt, mit dem *potentiellen Unendlichen* zu tun. Aber das eigentlich Unendliche selbst ist dies nicht. Dieses haben wir z. B., wenn wir die Gesamtheit der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... selbst als eine fertige Einheit betrachten oder die Punkte einer Strecke als eine Gesamtheit von Dingen ansehen, die fertig vorliegt. Diese Art des Unendlichen wird als *aktual unendlich* bezeichnet.

Schon die beiden um die Grundlagen der Mathematik hochverdienten Mathematiker Frege und Dedekind haben — unabhängig voneinander — das aktual Unendliche angewandt und zwar zu dem Zwecke, die Arithmetik unabhängig von aller Anschauung und Erfahrung auf reine Logik zu begründen und durch diese allein zu deduzieren. Dedekinds Bestreben ging sogar soweit, die endliche Anzahl nicht der Anschauung zu entnehmen, sondern unter wesentlicher Benutzung des Begriffes der unendlichen Mengen rein logisch abzuleiten. Cantor aber gestaltete den Begriff des aktual Unendlichen systematisch aus. Fassen wir die beiden genannten Beispiele für Unendlich ins Auge

1. 1, 2, 3, 4, ...;
2. Punkte der Strecke 0 bis 1 oder, was dasselbe ist, die Gesamtheit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1,

so liegt es am nächsten, sie vom reinen Vielheitsstandpunkt aus zu betrachten, und dabei nehmen wir überraschende Tatsachen wahr, die heute jedem Mathematiker geläufig sind. Betrachten wir nämlich die Menge aller rationalen Zahlen, also aller Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{3}{7}, \ldots$, so zeigt sich, daß — vom reinen Vielheitsstandpunkt aus — diese Menge nicht größer als die Menge der ganzen Zahlen ist: wir sagen, daß die rationalen Zahlen auf gewöhnliche Weise abgezählt werden können oder sie sind abzählbar. Und dasselbe gilt auch noch von der Menge aller durch Wurzelziehen herstellbaren, ja sogar aller algebraischen Zahlen überhaupt. Mit unserem zweiten Beispiel verhält es sich ähnlich: unerwarteterweise ist auch die Menge aller Punkte in einem Quadrat oder Würfel vom reinen Vielheitsstandpunkte aus nicht größer als die Menge der Punkte auf der Strecke 0 bis 1; ja sogar noch für die Menge aller stetigen Funktionen gilt das gleiche. Wer das zum erstenmal erfährt, könnte auf den Gedanken kommen, es gäbe vom reinen Vielheitsstandpunkt aus überhaupt nur ein einziges Unendlich. Nein: die Mengen in unseren beiden Beispielen 1. und 2. sind nicht „gleich mächtig", wie man sagt; vielmehr kann die Menge 2. nicht abgezählt werden, sondern sie ist größer als die Menge 1. Hier setzt nun die charakteristische Wendung in den Ideenbildungen Cantors ein. Die Punkte der Strecke können auf gewöhnliche Weise mit $1, 2, 3, \ldots$ nicht abgezählt werden! Aber bei der Zulassung des aktual Unendlichen sind wir auch gar nicht auf diese gewöhnliche Art des Abzählens beschränkt und keineswegs genötigt, damit aufzuhören. Wenn wir $1, 2, 3, \ldots$ gezählt haben, so können wir vielmehr die so abgezählten Gegenstände als eine in dieser bestimmten Anordnung fertige unendliche Menge ansehen; bezeichnen wir diese Anordnung, wie Cantor es tut, ihrem Typus nach mit ω, so setzt sich das Abzählen naturgemäß fort mit $\omega+1$, $\omega+2, \ldots$ bis $\omega+\omega$ oder $\omega\cdot 2$ und dann wieder $\omega\cdot 2+1$, $\omega\cdot 2+2$, $\omega\cdot 2+3 \ldots \omega\cdot 2+\omega=\omega\cdot 3$ und weiter $\omega\cdot 2, \omega\cdot 3, \omega\cdot 4, \ldots, \omega\cdot\omega=\omega^2, \omega^2+1 \ldots$, so daß wir schließlich die folgende Tabelle erhalten:

$$
\begin{array}{l}
1, 2, 3, \ldots \\
\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots \\
\omega\cdot 2,\ \omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \ldots \\
\omega\cdot 3,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots \\
\omega^2,\ \omega^2+1,\ \ldots \\
\omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega\cdot 2,\ \omega^2+\omega\cdot 3,\ \ldots \\
\omega^2\cdot 2,\ \ldots \\
\omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots \\
\omega^3,\ \ldots \\
\omega^4,\ \ldots \\
\omega^\omega,\ \ldots \\
\cdot
\end{array}
$$

Dies sind die ersten transfiniten Zahlen Cantors, die Zahlen der zweiten Zahlklasse, wie sie Cantor nennt. Zu ihnen gelangen wir also einfach durch ein Hinüberzählen über das gewöhnliche abzählbare Unendlich, d. h. durch eine ganz naturgemäße und eindeutig bestimmte, konsequente Fortsetzung des gewöhnlichen Zählens im Endlichen. Wie wir bisher bloß das 1-te, 2-te, 3-te, ... Ding einer Menge zählten, zählen wir jetzt auch das ω-te, $(\omega+1)$-te, ..., ω^{ω}-te Ding.

Bei dieser Sachlage entsteht offenbar sofort die Frage, ob man nun durch dieses transfinite Zählen auch wirklich Mengen auszählen kann, die im gewöhnlichen Sinne nicht abzählbar sind.

Cantor hat nun in Verfolg dieser Gedanken die Theorie der transfiniten Zahlen aufs erfolgreichste ausgebaut und einen vollständigen Kalkül für dieselben geschaffen. So wurde schließlich durch die gigantische Zusammenarbeit von Frege, Dedekind, Cantor das Unendliche auf den Thron gehoben und genoß die Zeit des höchsten Triumphes. Das Unendliche war in kühnstem Fluge auf eine schwindelnde Höhe des Erfolges gelangt.

Die Reaktion blieb nicht aus; sie spielte sich sehr dramatisch ab. Es geschah genau analog, wie in der Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Man war in der Freude über die neuen und reichen Resultate hinsichtlich der Zulässigkeit der Schlußweisen offenbar zu wenig kritisch verfahren; denn es stellten sich bei bloßer Anwendung der allmählich üblich gewordenen Begriffsbildungen und Schlußweisen Widersprüche heraus, zuerst vereinzelt, allmählich immer schärfer und immer ernster: die sogenannten Paradoxien der Mengenlehre. Insbesondere war es ein von Zermelo und Russell gefundener Widerspruch, dessen Bekanntwerden in der mathematischen Welt geradezu von katastrophaler Wirkung war. Angesichts dieser Paradoxien gaben Dedekind und Frege ihren Standpunkt tatsächlich auf und räumten das Feld: Dedekind trug lange Bedenken, von seiner epochemachenden Abhandlung „Was sind und was sollen die Zahlen" eine Neuauflage zuzulassen; und auch Frege hat die Tendenz seines Buches „Grundgesetze der Arithmetik" als verfehlt erkennen müssen, wie er in einem Nachwort gesteht. Und gegen Cantors Lehre gar wurden von den verschiedensten Seiten die heftigsten Angriffe gerichtet. Die Gegenbewegung war so ungestüm, daß die allerüblichsten und fruchtbarsten Begriffe und die allersimpelsten und wichtigsten Schlußweisen in der Mathematik bedroht wurden und ihre Anwendung verboten werden sollte. Zwar fehlte es nicht an Verteidigern des Alten; aber die Abwehrmaßregeln waren recht matt; sie setzten überdies nicht in einheitlicher Front an der richtigen Stelle ein. Der Heilmittel gegen die Paradoxien wurden zu viele empfohlen, die Methoden zur Aufklärung waren zu buntscheckig.

Es soll zugegeben werden, daß der Zustand, in dem wir uns gegenwärtig angesichts der Paradoxien befinden, für die Dauer unerträglich ist. Man denke: in der Mathematik, diesem Muster von Sicherheit und Wahrheit, führen die Begriffsbildungen und Schlüsse, wie sie jedermann lernt, lehrt und anwendet, zu Ungereimtheiten. Und wo soll sonst Sicherheit und Wahrheit zu finden sein, wenn sogar das mathematische Denken versagt?

Aber es gibt einen völlig befriedigenden Weg, den Paradoxien zu entgehen, ohne Verrat an unserer Wissenschaft zu üben. Die Gesichtspunkte zur Auffindung dieses Weges und die Wünsche, die uns die Richtung weisen, sind diese:

1. Fruchtbaren Begriffsbildungen und Schlußweisen wollen wir, wo immer nur die geringste Aussicht sich bietet, sorgfältig nachspüren und sie pflegen, stützen und gebrauchsfähig machen. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

2. Es ist nötig, durchweg dieselbe Sicherheit des Schließens herzustellen, wie sie in der gewöhnlichen niederen Zahlentheorie vorhanden ist, an der niemand zweifelt und wo Widersprüche und Paradoxien nur durch unsere Unaufmerksamkeit entstehen.

Die Erreichung dieser Ziele ist offenbar nur möglich, wenn uns die volle Aufklärung über *das Wesen des Unendlichen* gelingt.

Vorhin haben wir gesehen, daß in der Wirklichkeit das Unendliche nirgends zu finden ist, was für Erfahrungen und Beobachtungen und welcherlei Wissenschaft wir auch heranziehen. Sollte nun das Denken über die Dinge so unähnlich den Geschehnissen mit den Dingen sein und so andersartig vor sich gehen, so abseitig von aller Wirklichkeit? Ist es nicht vielmehr klar, daß wir uns, wenn wir die Realität des Unendlichen in irgendeinem Sinne zu erkennen glaubten, nur haben durch den Umstand dazu verleiten lassen, daß wir tatsächlich in der Wirklichkeit so oft so ungeheure Dimensionen im Großen und im Kleinen antreffen? Und das inhaltliche logische Schließen, hat uns denn dieses irgendwo getäuscht oder im Stich gelassen, wenn wir es auf wirkliche Dinge oder Geschehnisse anwandten? Nein — das inhaltliche logische Schließen ist unentbehrlich. Getäuscht hat es nur dann, wenn wir beliebige abstrakte Begriffsbildungen hinnahmen, auch solche, unter die unendlichviele Gegenstände fallen; wir haben dann das inhaltliche Schließen eben unzulässig angewandt, d. h. wir haben offenbar notwendige Vorbedingungen für die Anwendung inhaltlichen logischen Schließens nicht berücksichtigt. Und in der Erkenntnis, daß solche vorhanden sind und berücksichtigt werden müssen, befinden wir uns in Übereinstimmung mit den Philosophen, insbesondere mit Kant. Schon Kant hat gelehrt — und zwar bildet dies einen integrierenden Bestandteil seiner Lehre —, daß die Mathematik über einen unabhängig von aller Logik gesicherten Inhalt verfügt und daher nie und nimmer allein durch Logik begründet werden kann, weshalb auch die Bestrebungen von Frege und Dedekind scheitern mußten. Vielmehr ist als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Betätigung logischer Operationen schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse, außer-logische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt oder einer Reduktion bedarf. Dies ist die philosophische Grundeinstellung, die ich für die Mathematik wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte. Und insbesondere in der Mathematik sind Gegenstand unserer Betrachtung die konkreten Zeichen selbst, deren Gestalt unserer Einstellung zufolge unmittelbar deutlich und wiedererkennbar ist.

Vergegenwärtige man sich Wesensart und Methodik der gewöhnlichen finiten Zahlentheorie. Diese läßt sich gewiß allein durch Zahlenkonstruktionen mittels inhaltlicher anschaulicher Überlegungen aufbauen. Aber die mathematische Wissenschaft ist keineswegs durch Zahlengleichungen erschöpft und auch nicht allein auf solche reduzierbar. Wohl aber kann man behaupten, daß sie ein Apparat sei, der in seiner Anwendung auf ganze Zahlen stets richtige Zahlengleichungen liefern muß. Dann aber erhebt sich die Forderung, den Bau des Apparates soweit zu untersuchen, um dies zu erkennen. Und als Hilfsmittel dazu steht uns nur dieselbe konkret inhaltliche Betrachtungsweise und *finite Einstellung* des Denkens zu Gebote, wie sie beim Aufbau der Zahlentheorie selbst zur Ableitung der Zahlengleichungen angewandt wurde. Diese wissenschaftliche Forderung ist in der Tat erfüllbar, d. h. es ist möglich, auf rein anschauliche und finite Weise — gerade wie die Wahrheiten der Zahlentheorie — auch diejenigen Einsichten zu gewinnen, die die Zuverlässigkeit des mathematischen Apparates gewährleisten. Wir gehen nun genauer auf die Zahlentheorie ein.

In der Zahlentheorie haben wir die Zahlzeichen

$$1, \quad 11, \quad 111, \quad 11111,$$

wo jedes Zahlzeichen anschaulich dadurch kenntlich ist, daß in ihm auf 1 immer wieder 1 folgt. Diese Zahlzeichen — selbst Gegenstand unserer Betrachtung — haben an sich keinerlei Bedeutung. Außer diesen Zeichen aber brauchen wir bereits in der elementaren Zahlentheorie noch andere Zeichen, die etwas bedeuten und zur Mitteilung dienen, z. B. das Zeichen 2 zur Abkürzung für das Zahlzeichen 11, oder das Zahlzeichen 3 zur Abkürzung für das Zahlreichen 111; ferner wenden wir die Zeichen $+$, $=$, $>$ und andere an, die zur Mitteilung von Behauptungen dienen. So soll $2+3=3+2$ zur Mitteilung der Tatsache dienen, daß $2+3$ und $3+2$ mit Rücksicht auf die benutzten Abkürzungen dasselbe Zahlzeichen, nämlich das Zahlzeichen 11111 sind. Ebenso dient alsdann $3>2$ zur Mitteilung der Tatsache, daß das Zeichen 3, d. h. 111, über das Zeichen 2, d. h. 11, hinausragt oder das letztere Zeichen ein Teilstück des ersteren ist.

Wir verwenden zur Mitteilung auch Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ für Zahlzeichen. Danach ist $\mathfrak{b}>\mathfrak{a}$ die Mitteilung, daß das Zahlzeichen $\mathfrak{b}$ über das Zahlzeichen $\mathfrak{a}$ hinausragt. Und ebenso wäre vom gegenwärtigen Standpunkte aus $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$ nur die Mitteilung der Tatsache, daß das Zahlzeichen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ dasselbe ist wie $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$. Und dabei kann das inhaltliche Zutreffen dieser Mitteilung auch durch inhaltliches Schließen bewiesen werden, und wir können mit dieser anschaulichen, inhaltlichen Art der Behandlung sehr weit vorwärts kommen.

Ich möchte Ihnen nun ein erstes Beispiel zeigen, wo diese anschauliche Betrachtungsweise überschritten wird. Die größte bisher bekannte Primzahl ist (39 Ziffern)

$$\mathfrak{p}=170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727.$$

Durch das bekannte Euklidische Verfahren können wir völlig im Rahmen unserer Einstellung den Satz beweisen, daß es zwischen $\mathfrak{p}+1$ und $\mathfrak{p}!+1$ gewiß eine neue Primzahl gibt. Diese Aussage selbst entspricht auch völlig unserer finiten Einstellung. Denn *„es gibt“* dient hier nur zur Abkürzung für die Aussage: Es ist gewiß

$$\mathfrak{p}+1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}+2 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}+3 \quad \ldots \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}!+1$$

eine Primzahl. Nun aber weiter: Es ist auch offenbar dasselbe, wenn ich sage: es gibt eine Primzahl, die

1. $>\mathfrak{p}$

und zugleich

2. $\leqq \mathfrak{p}!+1$

ist, und hierdurch kommen wir darauf, einen Satz zu formulieren, der nur einen Teil der Euklidischen Behauptung ausdrückt, nämlich: es gibt eine Primzahl, die $>\mathfrak{p}$ ist. Obwohl dies inhaltlich nur eine weit geringere Behauptung ist, nur eine Teilaussage der Euklidischen und so harmlos der Übergang erscheint, so ist es doch ein Sprung ins Transfinite, wenn diese Teilaussage, losgelöst aus dem obigen Zusammenhange, als eine selbständige Behauptung ausgesprochen wird.

Wie kann das sein? Wir haben hier eine Existentialaussage „es gibt"! Freilich hatten wir eine solche auch schon in dem Euklidischen Satz. Gewiß, aber dort war das „es gibt", wie ich schon sagte, nur eine andere kürzere Ausdrucksweise für: entweder ist

$$\mathfrak{p}+1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}+2 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}+3 \quad \ldots \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}!+1$$

eine Primzahl — gerade wie ich, statt zu sagen, dieses Kreidestück ist rot oder jenes Kreidestück ist rot oder ... oder das Kreidestück dort ist rot, kürzer sage: es gibt unter diesen Kreidestücken ein rotes. Solch eine Behauptung, daß es in einer endlichen Gesamtheit einen Gegenstand mit einer Eigenschaft „gibt", entspricht völlig unserer finiten Einstellung. Die Alternative dagegen: entweder ist

$$\mathfrak{p}+1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}+2 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}+3 \quad \text{oder} \quad \ldots \quad \text{in inf.},$$

ist gleichsam ein unendliches logisches Produkt, und ein solcher Übergang zum Unendlichen ist ohne besondere Erörterung und eventuell gewisse Vorsichtsmaßregeln ebensowenig erlaubt, wie in der Analysis der Übergang vom endlichen zum unendlichen Produkt es ist, und er ist überhaupt zunächst sinnlos.

Allgemein hat vom finiten Standpunkt eine existentiale Aussage, von der Form: es gibt eine Zahl von der und der Eigenschaft, nur als *Partialaussage* einen Sinn, d. h. als Teil einer näher bestimmten Aussage, deren genauer Inhalt jedoch für viele Anwendungen unwesentlich ist.

Wir stoßen also hier auf das Transfinite durch Zerlegung einer existentialen Aussage, die sich nicht als eine Oder-Verknüpfung deuten läßt. Desgleichen kommen wir zu transfiniten Aussagen, wenn wir eine allgemeine, d. h. auf beliebige Zahlzeichen sich erstreckende Behauptung negieren. So ist z. B. die Aussage, daß, wenn $\mathfrak{a}$ ein Zahlzeichen ist, stets

$$\mathfrak{a}+1=1+\mathfrak{a}$$

sein muß, vom finiten Standpunkt *nicht negationsfähig*. Dies können wir uns klar machen, indem wir bedenken, daß diese Aussage nicht als eine Verbindung unendlich vieler Zahlengleichungen durch „und" gedeutet werden darf, sondern nur als ein hypothetisches Urteil, welches etwas behauptet für den Fall, daß ein Zahlzeichen vorliegt.

Hieraus folgt insbesondere, daß wir im Sinne der finiten Einstellung nicht die Alternative anwenden können, wonach eine Gleichung wie die obige, worin ein unbestimmtes Zahlzeichen vorkommt, entweder für jedes Zahlzeichen erfüllt ist oder durch ein Gegenbeispiel widerlegt wird. Denn diese Alternative beruht ja, als Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, wesentlich auf der Voraussetzung, daß die Behauptung der allgemeinen Gültigkeit jener Gleichung einer Negation fähig ist.

Wir konstatieren jedenfalls: Wenn wir im Bereiche der finiten Aussagen bleiben, wie wir doch müssen, so walten da sehr unübersichtliche logische Verhältnisse ob, und diese Unübersichtlichkeit steigert sich zur Unerträglichkeit, wenn das „alle“ und „es gibt“ kombiniert und in eingeschachtelten Sätzen auftritt. Jedenfalls diejenigen logischen Gesetze, die die Menschen, seit sie denken, stets gebraucht haben, und die eben Aristoteles gelehrt hat, gelten nicht. Nun könnte man darauf ausgehen, die für den Bereich der finiten Aussagen gültigen logischen Gesetze aufzustellen; aber damit wäre uns nicht gedient, da wir eben auf den Gebrauch der einfachen Gesetze der Aristotelischen Logik nicht verzichten wollen, und niemand, auch wenn er mit Engelszungen redete, wird die Menschen davon abhalten, beliebige Behauptungen zu negieren, Partialurteile zu bilden und das Tertium non datur anzuwenden. Wie werden wir uns nun verhalten?

Erinnern wir uns, *daß wir Mathematiker sind* und als solche uns schon oftmals in einer ähnlichen mißlichen Lage befunden haben und wie uns dann die geniale Methode der idealen Elemente daraus befreit hat. Einige leuchtende Vorbilder für die Anwendung dieser Methode habe ich Ihnen zu Anfang meines Vortrages angeführt. Gerade wie $i = \sqrt{-1}$ eingeführt wurde, um die Gesetze der Algebra z. B. die über Existenz und Anzahl der Wurzeln einer Gleichung in der einfachsten Gestalt aufrechtzuerhalten; gerade wie die Einführung der idealen Faktoren geschah, um auch unter den ganzen algebraischen Zahlen die einfachen Teilbarkeitsgesetze beizubehalten, wie wir z. B. für die Zahlen

$$2 \quad \text{und} \quad 1+\sqrt{-5}$$

einen gemeinsamen idealen Teiler einführen, während ein wirklicher nicht vorhanden ist, so haben wir hier *zu den finiten Aussagen die idealen Aussagen zu adjungieren*, um die formal einfachen Regeln der üblichen Aristotelischen Logik zu erhalten. Und es trifft sich sonderbar, daß die von Kronecker mit solcher Leidenschaft angefochtenen Schlußweisen das genaue Seitenstück zu dem sind, was derselbe Kronecker in der Zahlentheorie an Kummer so enthusiastisch bewundert und als die höchste mathematische Leistung gepriesen hat.

Wie gelangen wir nun zu den *idealen Aussagen*? Es ist da merkwürdig und jedenfalls ein günstiger und fürsprechender Umstand, daß wir, um auf den Weg zu ihnen zu kommen, nur nötig haben, in naturgemäßer und konsequenter Weise die Entwickelung, die die Lehre von den Grundlagen der Mathematik bereits genommen hat, fortzusetzen. In der Tat vergegenwärtigen wir uns, daß bereits die elementare Mathematik über den Standpunkt der anschaulichen Zahlentheorie hinausgeht. Die Methode der algebraischen Buchstabenrechnung ist nämlich in der inhaltlich-anschaulichen Zahlentheorie, wie wir sie bisher auffaßten, nicht mit inbegriffen. In dieser wurden die Formeln stets nur zur Mitteilung angewandt; die Buchstaben bedeuteten Zahlzeichen, und durch eine Gleichung wurde die Übereinstimmung zweier Zeichen mitgeteilt. Dagegen in der Algebra betrachten wir die Buchstabenausdrücke an sich als selbständige Gebilde und die inhaltlichen Sätze der Zahlentheorie werden durch sie formalisiert. An Stelle der Aussagen über die Zahlzeichen treten Formeln, die ihrerseits nun konkrekte Objekte einer anschaulichen Betrachtung sind; und an Stelle des inhaltlichen zahlentheoretischen Beweises tritt die Ableitung einer Formel aus einer anderen Formel nach gewissen Regeln.

Es tritt also, wie schon die Algebra zeigt, eine Vermehrung der finiten Objekte ein. Bisher waren dies nur die Zahlzeichen wie 1, 11, ..., 11111. Sie allein waren die Objekte inhaltlicher Betrachtung gewesen. Aber schon in der Algebra geht die mathematische Praxis darüber hinaus. Ja, auch wenn eine Aussage noch von unserem finiten Standpunkt aus in Verbindung mit den inhaltlichen Hinweisen zulässig ist, wie z. B. der Satz, daß stets

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a},$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ bestimmte Zahlzeichen bedeuten, so wählen wir doch nicht diese Form der Mitteilung, sondern setzen dafür vielmehr die Formel

$$a + b = b + a,$$

und diese ist auch gar nicht mehr eine unmittelbare Mitteilung von etwas Inhaltlichem, sondern ein gewisses formales Gebilde, dessen Verhältnis zu den alten finiten Aussagen

$$2 + 3 = 3 + 2,$$
$$5 + 7 = 7 + 5$$

darin besteht, daß wir in jener Formel für a, b Zahlzeichen 2, 3, 5, 7 einsetzen und dadurch, d. h. durch ein Beweisverfahren — wenn auch ein sehr einfaches — diese finiten Einzelaussagen gewinnen. So kommen wir zu der Auffassung, daß a, b, $=$, $+$, sowie die Gesamtformel

$$a + b = b + a$$

an sich nichts bedeuten, so wenig wie die Zahlzeichen; wohl aber können aus ihr Formeln abgeleitet werden, denen wir eine Bedeutung zuschreiben, und zwar, indem wir sie als Mitteilungen von finiten Aussagen auffassen. Wenn wir diese Auffassung generalisieren, so wird die Mathematik zu einem Bestande von Formeln, und zwar erstens solchen, denen inhaltliche Mitteilungen finiter Aussagen entsprechen, und zweitens von weiteren Formeln, die nichts bedeuten und die *idealen Gebilde unserer Theorie* sind.

Was war nun unser Ziel? Wir fanden in der Mathematik einerseits solche finite Aussagen, die nur Zahlzeichen enthielten, wie

$$3 > 2, \quad 2 + 3 = 3 + 2, \quad 2 = 3, \quad 1 \neq 1,$$

die auf unserem finiten Standpunkt unmittelbar anschaulich und ohne weiteres verständlich sind; diese sind negationsfähig, richtig oder falsch, man kann frei und unbedenklich mit ihnen aristotelisch-logisch schalten und walten; der Satz vom Widerspruch gilt, d. h. eine dieser Aussagen und ihre Negation können nicht beide richtig sein; das „Tertium non datur“ gilt, d. h. eine von beiden: die Aussage oder ihre Negation ist richtig. Wenn ich sage: die Aussage ist falsch, so ist dies gleichbedeutend mit: die Negation der Aussage ist richtig. Außer diesen Elementaraussagen von gänzlich unproblematischem Charakter trafen wir finite Aussagen problematischen Charakters an, z. B. solche, die nicht trennbar waren. Endlich haben wir nun die idealen Aussagen eingeführt, die bewirken sollen, daß insgesamt wieder die üblichen Gesetze der Logik gelten. Aber da die idealen Aussagen, nämlich die Formeln, soweit sie nicht finite Behauptungen ausdrücken, nichts bedeuten, so können an ihnen die logischen Operationen nicht inhaltlich wie an den finiten Aussagen vorgenommen werden. Es ist also nötig, die logischen Operationen und auch die mathematischen Beweise selbst zu formalisieren; dies erfordert eine Umsetzung der logischen Beziehungen in Formeln, so daß wir zu den mathematischen Zeichen noch logische Zeichen, etwa

$$\underset{\text{und}}{\&}, \quad \underset{\text{oder}}{\vee}, \quad \underset{\text{folgt}}{\rightarrow}, \quad \underset{\text{nicht}}{-}$$

hinzufügen und außer den mathematischen Variablen $a, b, c, \ldots$ auch logische Variable, nämlich variable Aussagen $A, B, C, \ldots$ benutzen müssen.

Wie kann das geschehen? Da tritt nun zum Glück für uns dieselbe prästabilierte Harmonie ein, die wir so oft in der Entwickelungsgeschichte der Wissenschaft bemerken, — die Einstein zustatten kam, als er für seine Gravitationstheorie den voll ausgearbeiteten allgemeinen Invariantenkalkül vorfand: wir treffen als fortgeschrittene Vorarbeit den *Logikkalkül* an. Freilich ist derselbe ursprünglich aus ganz anderen Gesichtspunkten heraus geschaffen, und demgemäß sind die Zeichen des Logikkalküls ursprünglich auch nur zur Mitteilung eingeführt worden; aber es ist konsequent, wenn wir jetzt auch den logischen Zeichen, ebenso wie den mathematischen alle Bedeutung absprechen und erklären, daß auch die Formeln des Logikkalküls an sich nichts bedeuten, sondern ideale Aussagen sind. In dem Logikkalkül besitzen wir eine Zeichensprache, welche fähig ist, mathematische Sätze in Formeln zu fassen und das logische Schließen durch formale Prozesse auszudrücken. Ganz entsprechend wie beim Übergang von der inhaltlichen Zahlenlehre zur formalen Algebra betrachten wir die Zeichen und Operationssymbole des Logikkalküls losgelöst von ihrer inhaltlichen Bedeutung. Dadurch erhalten wir schließlich an Stelle der inhaltlichen mathematischen Wissenschaft, welche durch die gewöhnliche Sprache mitgeteilt wird, nunmehr einen Bestand von Formeln mit mathematischen und logischen Zeichen, welche sich nach bestimmten Regeln aneinander reihen. Den mathematischen Axiomen entsprechen gewisse unter den Formeln und dem inhaltlichen Schließen entsprechen die Regeln, nach denen die Formeln aufeinander folgen: das inhaltliche Schließen wird also durch ein äußeres Handeln nach Regeln ersetzt und es wird damit einerseits für die Axiome selbst, die doch auch ursprünglich naiv als Grundwahrheiten gemeint waren, die aber schon längst in der modernen Axiomatik bloß als Verknüpfungen von Begriffen angesehen wurden, wie ferner auch für den Logikkalkül, der ursprünglich nur eine andere Sprache sein sollte, jetzt der strenge Übergang von naiver zu formaler Behandlung vollzogen.

Nur die Art, wie *der mathematische Beweis* formalisiert wird, sei noch kurz erläutert. Gewisse Formeln, wie ich sagte, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein mathematischer Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen nach dem Schlußschema

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S}\rightarrow\mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}},$$

wo jede der Prämissen, d. h. der betreffenden Formeln $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}\rightarrow\mathfrak{T}$, entweder ein Axiom ist bzw. aus einem Axiom durch Einsetzung hervorgeht oder mit der Endformel eines früheren Schlusses übereinstimmt, bzw. aus ihr durch Einsetzung entsteht. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie Endformel eines Beweises ist.

Durch unser Programm ist die Wahl der Axiome für unsere Beweistheorie schon vorgezeichnet. Trotz mancher Willkür in der Auswahl der Axiome unterscheiden sich doch analog wie in der Geometrie qualitativ einzelne getrennte Gruppen, aus denen wir jedesmal einige Beispiele anführen:

I. Axiome der Folge:

$$A\rightarrow(B\rightarrow A)$$

(Zufügen einer Voraussetzung);

$$(B\rightarrow C)\rightarrow\{(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)\}$$

(Elimination einer Aussage).

II. Axiome der Negation:

$$\{A \to (B \,\&\, \overline{B})\} \to \overline{A}$$

(Satz vom Widerspruch);

$$\overline{\overline{A}} \to A$$

(Satz von der doppelten Verneinung).

Diese Axiome der Gruppen I. und II. sind keine anderen als die Axiome des Aussagenkalküls.

III. Transfinite Axiome:

$$(a) A(a) \to A(b)$$

(Schluß vom Allgemeinen aufs Besondere, Aristotelisches Axiom);

$$\overline{(a)} A(a) \to (Ea) \overline{A}(a)$$

(wenn ein Prädikat nicht für alle gilt, so gibt es ein Gegenbeispiel);

$$\overline{(Ea)} A(a) \to (a) \overline{A}(a)$$

(wenn es kein Beispiel für eine Aussage gibt, so ist die Aussage für alle a falsch).

Dabei stellt sich noch ein sehr merkwürdiger Umstand heraus, nämlich, daß diese transfiniten Axiome sämtlich aus einem einzigen ableitbar sind, und das ist ein solches, welches zugleich den Kern des bisher in der mathematischen Literatur am meisten angefochtenen sogenannten Auswahl-Axioms enthält:

$$A(a) \to A(\varepsilon A),$$

wo ε die transfinite logische Auswahlfunktion ist.

Dazu kommen die speziell mathematischen Axiome:

IV. Axiome der Gleichheit:

$$a = a;$$

$$a = b \to (A(a) \to A(b)),$$

und endlich:

V. Axiome der Zahl:

$$a + 1 \neq 0;$$

das Axiom der vollständigen Induktion.

Auf diese Weise sind wir imstande, unsere Beweistheorie durchzuführen und das System der beweisbaren Formeln, d. h. die mathematische Wissenschaft aufzubauen.

Aber in der Freude über dies Gelingen im allgemeinen und über den Logikkalkül im besondern, den wir ohne unser Zutun als ein so unentbehrliches Rüstzeug vorfanden, dürfen wir doch die wesentliche Vorbedingung für unser Tun nicht vergessen. Es gibt nämlich eine Bedingung, eine einzige, aber auch absolut notwendige, an die die Anwendung der Methode der idealen Elemente geknüpft ist, und diese ist der *Nachweis der Widerspruchsfreiheit*: die Erweiterung durch Zufügung von Idealen ist nämlich nur dann statthaft, wenn dadurch im alten engeren Bereiche keine Widersprüche entstehen, wenn also die Beziehungen, die sich bei Elimination der idealen Gebilde für die alten Gebilde herausstellen, stets im alten Bereiche gültig sind.

Dieses Problem der Widerspruchsfreiheit ist aber bei der gegenwärtigen Sachlage durchaus der Behandlung zugänglich. Es reduziert sich darauf, wie man sofort erkennt, einzusehen, daß aus unseren Axiomen nach den aufgestellten Regeln „$1 \neq 1$“ sich nicht als Endformel herausstellen kann, also „$1 \neq 1$“ nicht eine beweisbare Formel ist. Und dies ist eine Aufgabe, die grundsätzlich ebenso im Bereich der anschaulichen Betrachtung liegt, wie in der inhaltlich aufgebauten Zahlentheorie etwa die Aufgabe des Beweises der Irrationalität von $\sqrt{2}$, d. h. des Beweises, daß es unmöglich ist, zwei Zahlzeichen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zu finden, welche in der Beziehung $\mathfrak{a}^2 = 2\,\mathfrak{b}^2$ stehen, wo also gezeigt werden soll, daß sich nicht zwei Zahlzeichen von einer gewissen Beschaffenheit angeben lassen. Entsprechend kommt es für uns darauf an, zu zeigen, daß sich nicht ein Beweis von einer gewissen Beschaffenheit angeben läßt. Ein formalisierter Beweis ist aber, ebenso wie ein Zahlzeichen, ein konkreter und überblickbarer Gegenstand. Er ist von Anfang bis Ende mitteilbar. Auch die verlangte Beschaffenheit der Endformel, daß sie „$1 \neq 1$“ lautet, ist eine konkret feststellbare Eigenschaft des Beweises. Tatsächlich läßt sich dieser Nachweis erbringen, und damit gewinnen wir die Berechtigung zur Einführung unserer idealen Aussagen.

Zugleich noch erfahren wir die freudige Überraschung, daß wir damit ein Problem lösen, das längst brennend geworden ist, nämlich das Problem, *die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome* zu beweisen. Überall nämlich, wo die axiomatische Methode zur Anwendung kommt, tritt dieses Problem, die Widerspruchsfreiheit zu beweisen, auf. Wir wollen doch bei Auswahl, Auffassung und Handhabung der Axiome und Regeln nicht auf guten Glauben und bloßes Vertrauen angewiesen sein. In der Geometrie und den physikalischen Theorien gelingt der Nachweis der Widerspruchsfreiheit durch Zurückführung auf die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome. Diese Methode versagt offenbar bei der Arithmetik selbst. Indem unsere Beweistheorie auf Grund der Methode der idealen Elemente diesen letzten wichtigen Schritt ermöglicht, bildet sie den notwendigen Schlußstein in dem Lehrgebäude der Axiomatik. Und was wir zweimal erlebt haben, einmal als es sich um die Paradoxien der Infinitesimalrechnung und dann um die Paradoxien der Mengenlehre handelte, das kann nicht zum dritten Male und wird nie wieder passieren.

Aber unsere hier skizzierte Beweistheorie ist nicht nur imstande, die Grundlagen der mathematischen Wissenschaft zu sichern, sondern ich glaube, daß sie auch einen Weg eröffnet, um überhaupt allgemeine in den mathematischen Denkbereich fallende Fragen grundsätzlicher Art zu behandeln, an die man sich früher nicht heranmachen konnte.

Die Mathematik erweitert sich gewissermaßen zu einem Schiedsgericht, einem Tribunal höchster Instanz, um prinzipielle Fragen zum Austrag zu bringen — auf einer konkreten Basis, auf der sich alle müssen einigen können und jede Behauptung kontrolliert werden kann.

Auch die Behauptungen des neueren sogenannten „Intuitionismus“ — so bescheiden sie sein mögen — werden meiner Meinung nach erst von diesem Tribunal ihren Berechtigungsschein erlangen.

Als Beispiel für die Behandlung grundsätzlicher Fragen möchte ich die These wählen, daß jedes mathematische Problem einer Lösung fähig ist. Wir sind alle davon überzeugt. Es bildet ja gerade einen Hauptreiz bei der Beschäftigung mit einem mathematischen Problem, daß wir in uns den steten Zuruf hören: da ist das Problem, suche die Lösung; du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus. Nun kann zwar meine Beweistheorie nicht allgemein einen Weg angeben, auf dem jedes mathematische Problem sich lösen läßt — einen solchen gibt es auch nicht; aber der Nachweis, daß die Annahme der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems widerspruchsfrei ist, fällt durchaus in den Bereich unserer Theorie.

Aber ich möchte noch einen letzten Trumpf ausspielen: für jede neue Theorie ist der endgültige Prüfstein ihr Erfolg in Fragen, die schon vorher da waren und zu deren Beantwortung allein sie gar nicht geschaffen worden ist. An ihren Früchten sollt ihr sie erkennen, heißt es auch für die Theorien. Sobald Cantor seine ersten transfiniten Zahlen, die sogenannten Zahlen der zweiten Zahlklasse, entdeckt hatte, entstand, wie ich bereits erwähnte, die Frage, ob man durch dieses transfinite Zählen auch wirklich anderwärts bekannte Mengen auszählen kann, die in gewöhnlichem Sinne nicht abzählbar sind. Als solche Menge kam in erster Linie die Punktstrecke in Betracht. Diese Frage, ob durch die Zahlen der vorhin aufgestellten Tabelle die Punkte der Strecke, d. h. die reellen Zahlen, sich auszählen lassen, ist das berühmte Kontinuumproblem, von Cantor aufgestellt, aber nicht gelöst. Einige Mathematiker haben geglaubt, dieses Kontinuumproblem durch Fortleugnen beseitigen zu können. Meine folgenden Ausführungen zeigen, wie verkehrt diese Stellungnahme ist. Das Kontinuumproblem ist durch seine Eigenart und innere Schönheit ausgezeichnet, und es hat vor anderen berühmten Problemen noch den Vorzug, daß es beiderlei Qualitäten in sich vereinigt: seine Lösung erfordert neue

Wege, da die alten Methoden an ihm versagen, und andererseits: seine Lösung ist auch an und für sich von höchstem Interesse wegen des festzustellenden Resultates.

Die Lösung dieses Kontinuumproblems gelingt durch die von mir entwickelte Theorie, und zwar ist eben jener Nachweis der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems der erste und wichtigste Schritt zu dieser Lösung. Die Beantwortung fällt in bejahendem Sinne aus: die Punkte einer Strecke können durch die Zahlen der zweiten Zahlklasse, d. h. durch bloßes Hinüberzählen über das abzählbare Unendlich ausgezählt werden, um es in populärer Form auszudrücken. Ich möchte diese Behauptung selbst den Kontinuumsatz nennen und den Grundgedanken des Beweises dafür hier inhaltlich kurz darlegen.

Statt der Menge der reellen Zahlen betrachten wir — was hier offenbar das nämliche ist — die Menge der zahlentheoretischen Funktionen, d. h. derjenigen Funktionen eines ganzzahligen Argumentes, deren Werte ebenfalls stets ganze Zahlen sind. Wenn wir die Menge dieser Funktionen im Sinne des Kontinuumproblems ordnen wollen, so bedarf es dazu der Bezugnahme auf die Erzeugung der einzelnen Funktion. Nun kann eine Funktion eines Argumentes derart definiert sein, daß dabei die Werte der Funktion für einige oder auch für alle Argumentwerte von der Lösung irgendwelcher wohlbestimmter mathematischer Probleme abhängig gemacht sind, z. B. von der Lösung gewisser diophantischer Aufgaben oder dem Vorhandensein von Primzahlen mit gewissen Eigenschaften oder von der Frage, ob eine vorliegende Zahl wie etwa $2^{\sqrt{2}}$ irrational ist. Um die hierin liegende Schwierigkeit zu vermeiden, bedienen wir uns eben jener vorhin erwähnten Behauptung von der Lösbarkeit eines jeden wohlbestimmten mathematischen Problems. Diese Behauptung ist ein allgemeines Lemma, das der *Metamathematik* angehört, wie ich die inhaltliche Theorie der formalisierten Beweise nennen möchte. Das, was von demselben hier für uns in Betracht kommt, spreche ich in genauer Fassung folgendermaßen aus:

Lemma I. Wenn unter Zuziehung von Funktionen, die mittels des transfiniten Symbols ε (Axiomgruppe III) definiert sind, ein Beweis eines Widerspruchs gegen den Kontinuumsatz — in formalisierter Gestalt — vorliegt, so lassen sich in diesem Widerspruchsbeweise jene Funktionen stets durch solche ersetzen, die ohne Verwendung des Symbols ε, allein durch gewöhnliche und transfinite Rekursion, definiert sind — derart, daß das Transfinite nur in Gestalt des Allzeichens: () auftritt.

Ferner sind für die Durchführung meiner Theorie einige Festsetzungen nötig.

Für *variable Aussagen* (allgemeine Formeln) werden stets große lateinische Buchstaben, für *individuelle Aussagen* (spezielle Formeln) dagegen große griechische Buchstaben benutzt, z. B.

$\mathsf{Z}(a)$: „a ist eine gewöhnliche ganze Zahl“.

$\mathsf{N}(a)$: „a ist eine Zahl der zweiten Zahlklasse“.

Für *mathematische Variable* werden stets kleine lateinische Buchstaben, für *individuelle mathematische Gebilde* (spezielle Funktionen) dagegen kleine griechische Buchstaben benutzt.

Was das Verfahren der *Einsetzung* betrifft, so gelten dabei folgende allgemeine Verabredungen.

Für Aussagenvariable dürfen nur andere allgemeine oder individuelle Aussagen (Formeln) eingesetzt werden.

Für eine mathematische Variable darf eine jede Figur eingesetzt werden; jedoch muß, wenn eine mathematische Variable in einer Formel auftritt, stets die ihre Art charakterisierende Individualaussage nebst dem Folgtzeichen voranstehen, z. B.

$$\mathsf{Z}(a) \rightarrow (\ldots a \ldots),$$
$$\mathsf{N}(a) \rightarrow (\ldots a \ldots).$$

Diese Verabredung bewirkt, daß doch nur solche Einsetzungen z. B. für a in $\mathsf{Z}(a)$ oder in $\mathsf{N}(a)$ in Betracht kommen, die gewöhnliche Zahlen bzw. Zahlen der zweiten Zahlklasse sind.

Deutsche große, sowie kleine Buchstaben bedeuten *Hinweise* und werden nur zu Mitteilungen verwandt.

Zu bemerken ist noch, daß unter „*Figur*“ ein aus Einzelzeichen zusammengesetztes, anschaulich vorliegendes Gebilde verstanden werden soll.

Um den Beweisgedanken für den Kontinuumsatz zu verstehen, bedarf es vor allem der scharfen Erfassung des Begriffes der allgemeinsten mathematischen Variablen. Die mathematischen Variablen sind zweierlei Art:

1. *die Grundvariablen,*
2. *die Variablentypen.*

1. Während man in der gesamten Arithmetik und Analysis mit der gewöhnlichen ganzen Zahl als einziger Grundvariablen auskommt, gehört jetzt einer jeden Cantorschen transfiniten Zahlklasse eine *Grundvariable* zu, die eben die Ordinalzahlen dieser Klasse anzunehmen fähig ist. Einer jeden Grundvariablen entspricht demgemäß eine Aussage, die sie als solche charakterisiert; diese ist implizite durch Axiome charakterisiert, z. B.

$$\mathsf{Z}(0),$$
$$\mathsf{Z}(a) \to \mathsf{Z}(a+1),$$
$$\{A(0)\,\&\,(a)(A(a) \to A(a+1))\} \to \{\mathsf{Z}(a) \to A(a)\}$$

(Formel der gewöhnlichen Induktion);

$$\mathsf{N}(0),$$
$$\mathsf{N}(a) \to \mathsf{N}(a+1),$$
$$(n)\{\mathsf{Z}(n) \to \mathsf{N}\,a(n)\} \to \mathsf{N}\lim a(n);$$

dazu die Formel der transfiniten Induktion für die Zahlen der zweiten Zahlklasse.

Zu jeder Art von Grundvariablen gehört eine Art von Rekursion, mit deren Hilfe man Funktionen definiert, deren Argument eine solche Grundvariable ist. Die zu der Zahlenvariablen gehörige Rekursion ist die „gewöhnliche Rekursion", gemäß welcher eine Funktion einer Zahlenvariablen n definiert wird, indem man angibt, welchen Wert sie für $n = 0$ hat und wie man den Wert für $n+1$ aus dem für n erhält. Die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Rekursion ist die transfinite Rekursion, deren allgemeines Prinzip darin besteht, den Wert der Funktion für einen Wert der Variablen durch die vorhergehenden Funktionswerte zu bestimmen.

2. Aus den Grundvariablen leiten wir noch weitere Arten von Variablen ab, indem wir auf die Aussagen für die Grundvariablen, z. B. Z, N logische Verknüpfungen anwenden. Die so definierten Variablen heißen *Variablentypen*, die sie definierenden Aussagen heißen *Typenaussagen*; für diese werden wieder jedesmal neue Individualzeichen eingeführt. So liefert die Formel

$$(a)\{\mathsf{Z}(a) \to \mathsf{Z}(f(a))\}$$

das einfachste Beispiel für einen Variablentyp; diese Formel definiert nämlich die Funktionsvariable f und werde als Typenaussage mit $\Phi(f)$ „Funktion sein" bezeichnet. Ein weiteres Beispiel ist die Formel

$$(f)\{\Phi(f) \to \mathsf{Z}\,g(f)\};$$

sie definiert das „Funktionenfunktion sein" $\Psi(g)$, wo das Argument g die neue Funktionenfunktionsvariable ist.

Für die Charakterisierung der höheren Variablentypen muß man die Typenaussagen selbst mit Indizes versehen; eine solche mit Index versehene Typenaussage wird durch Rekursion definiert, wobei an Stelle der Gleichheit ($=$) die logische Äquivalenz ($\sim$) tritt.

In der gesamten Arithmetik und Analysis kommen als höhere Variable nur die Funktionsvariable, die Funktionenfunktionsvariable usw. in endlicher Iterierung zur Anwendung. Einen über diese einfachsten Beispiele hinausgehenden Variablentyp liefert die Variable g, welche einer Folge f_n, bestehend aus

einer Funktion f_1 einer ganzen Zahl: $\Phi(f_1)$,
einer Funktionenfunktion f_2: $\Psi(f_2)$,
einer Funktion f_3 von einer Funktionenfunktion,
usw.

einen Zahlenwert $g(f_n)$ zuordnet. Die zugehörige Typenaussage $\Phi_\omega(g)$ wird durch folgende Äquivalenzen dargestellt:

$$\Phi_0(a) \sim Z(a),$$
$$\Phi_{n+1}(f) \sim (b)\{\Phi_n(b) \rightarrow Z(f(b))\},$$
$$\Phi_\omega(g) \sim \{(n)\,\Phi_n(f_n) \rightarrow Z(g(f))\};$$

diese liefern zugleich ein Beispiel für die Definition einer Typenaussage durch Rekursion.

Die Variablentypen können nach ihrer „*Höhe*" klassifiziert werden. Zur Höhe 0 rechnen wir alle Zahlkonstanten; zur Höhe 1 alle diejenigen Funktionen, deren Argumente und Werte die Eigenschaft einer Grundvariablen, z. B. die Z-Eigenschaft oder die N-Eigenschaft haben. Eine Funktion, deren Argument und Wert eine bestimmte Höhe hat, besitzt eine um 1 größere Höhe als die größere evtl. als jede jener beiden Höhen. Eine Folge von Funktionen verschiedener Höhe hat als ihre Höhe den Limes jener Höhen.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir unsere Aufgabe wieder auf und vergegenwärtigen uns, daß es zum Beweise des Kontinuumsatzes wesentlich darauf ankommt, die Definitionen ganzzahliger Funktionen, die vom Symbol ε frei sind, den Cantorschen Zahlen der zweiten Zahlklasse umkehrbar eindeutig zuzuordnen oder doch so zuzuordnen, daß dabei jede ganzzahlige Funktion als zugeordnete von mindestens einer Zahl der zweiten Zahlklasse auftritt.

Die elementaren Hilfsmittel zur Bildung von Funktionen sind offenbar die *Einsetzung* (d. h. Ersetzung eines Argumentes durch eine neue Variable oder Funktion) und die *Rekursion* (nach dem Schema der Ableitung des Funktionswertes für $n+1$ aus demjenigen für n).

Man könnte meinen, daß zu diesen beiden Prozessen der Einsetzung und Rekursion noch andere elementare Definitionsmethoden hinzugenommen werden müßten, z. B. die Definition einer Funktion durch Angabe ihrer Werte bis zu einer gewissen Stelle hin, von der an die Funktion konstant sein soll; ferner die Definition durch elementare Prozesse, die man aus den Rechenoperationen gewinnt, wie etwa die des Restes bei der Division oder des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen, oder auch die Definition einer Zahl als der kleinsten unter gewissen endlich-vielen Zahlen.

Es zeigt sich jedoch, daß alle solche Definitionen sich als Spezialfälle der Anwendung von Einsetzungen und Rekursionen darstellen lassen. Die Methode der Aufsuchung der erforderlichen Rekursionen ist im wesentlichen gleichbedeutend mit derjenigen Überlegung, durch welche man das betreffende Definitionsverfahren als finit erkennt.

Nach diesen Feststellungen kommt es darauf an, die Resultate der beiden Operationen der Einsetzung und Rekursion zu überblicken. Indes, was die anzuwendenden Rekursionen betrifft, so lassen sich diese, wie sich zeigt, wegen der mannigfachen Möglichkeiten des Überganges von n auf $n+1$ nicht auf eine einheitliche Form bringen, sofern man beim Operieren mit gewöhnlichen Zahlenvariablen stehen bleibt. Man erkennt diese Schwierigkeit bereits an folgendem Beispiel.

Betrachten wir die Funktionen

$$a+b;$$

daraus entsteht durch n-fache Iteration und Gleichsetzung

$$a+a+\ldots+a=a\cdot n.$$

Ebenso gelangt man von

$$a\cdot b \quad \text{zu} \quad a\cdot a\ldots a=a^n,$$

weiter von

$$a^b \quad \text{zu} \quad a^{(a^a)},\ a^{\left(a^{(a^a)}\right)},\ \ldots.$$

Wir bekommen so sukzessive die Funktionen

$$\begin{aligned} a+b &= \varphi_1(a,b), \\ a\cdot b &= \varphi_2(a,b), \\ a^b &= \varphi_3(a,b). \end{aligned}$$

$\varphi_4(a,b)$ ist der b-te Wert in der Folge:

$$a,\ a^a,\ a^{(a^a)},\ a^{\left(a^{(a^a)}\right)},\ \ldots.$$

In entsprechender Weise gelangt man zu $\varphi_5(a,b)$, $\varphi_6(a,b)$ usw.

Man könnte nun zwar $\varphi_n(a,b)$ für variables n durch Einsetzungen und Rekursionen definieren; diese Rekursionen aber wären nicht gewöhnliche sukzessive, sondern vielmehr würde man auf eine verschränkte, nach verschiedenen Variablen zugleich genommene (simultane) Rekursion geführt werden und eine Auflösung dieser in gewöhnliche sukzessive Rekursionen gelingt erst, wenn man den Begriff der Funktionsvariablen benutzt: die Funktion $\varphi_a(a,a)$ ist ein Beispiel einer Funktion der Zahlenvariablen a, die nicht durch Einsetzungen und gewöhnliche sukzessive Rekursionen allein definiert werden kann, wenn man lediglich Zahlenvariable zuläßt[2]).

---

[2]) Für diese Behauptung hat W. Ackermann den Beweis erbracht.

Wie man unter Benützung der Funktionsvariablen die Funktion $\varphi_n(a, b)$ definieren kann, zeigen die folgenden Formeln:

$$\iota(f, a, 1) = a,$$
$$\iota(f, a, n+1) = f(a, \iota(f, a, n));$$
$$\varphi_1(a, b) = a + b,$$
$$\varphi_{n+1}(a, b) = \iota(\varphi_n, a, b).$$

Hierbei bedeutet ι eine individuelle Funktion mit drei Argumenten, von denen das erste selbst eine Funktion zweier gewöhnlicher Zahlenvariablen ist.

Ein anderes Beispiel einer komplizierteren Rekursion ist dies:

$$\varphi_0(a) \quad = \mathfrak{a}(a)$$
$$\varphi_{n+1}(a) = \mathfrak{f}(a, n, \varphi_n(\varphi_n(n+a))),$$

wo $\mathfrak{a}$ einen bekannten Ausdruck eines Argumentes und $\mathfrak{f}$ einen bekannten Ausdruck mit drei Argumenten bedeutet. Das Charakteristische bei dieser Rekursion besteht darin, daß hier nicht aus einem Zahlenwert für n ein solcher für $n+1$ abzuleiten ist, sondern zur Bestimmung von φ_{n+1} der Verlauf der Funktion φ_n herangezogen werden muß.

Die in diesen Beispielen zutage tretenden Schwierigkeiten werden überwunden, wenn man sich der Variablentypen bedient; das allgemeine Rekursionsschema lautet alsdann folgendermaßen:

$$\varrho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, 0) \quad = \mathfrak{a},$$
$$\varrho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, n+1) = \mathfrak{g}(\varrho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, n), n);$$

hierin ist $\mathfrak{a}$ ein gegebener Ausdruck von beliebigem Variablentyp; $\mathfrak{g}$ ist ebenfalls ein gegebener Ausdruck und zwar mit zwei Argumenten, von denen das erste denselben Variablentyp wie $\mathfrak{a}$ hat, und das zweite eine Zahl ist; die Bedingung, die $\mathfrak{g}$ noch erfüllen muß, besteht darin, daß der Wert von $\mathfrak{g}$ wieder vom selben Variablentyp wie $\mathfrak{a}$ ist. Endlich ist ϱ der durch die Rekursion zu definierende Ausdruck, der von drei Argumenten abhängt und der, nachdem die Einsetzungen für $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$, n gemacht worden sind, denselben Variablentyp wie $\mathfrak{a}$ annimmt; überdies wird zugelassen, daß in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}$ und folglich auch in ϱ noch beliebige Parameter auftreten.

Aus diesem allgemeinen Schema gewinnt man durch Einsetzung bestimmte Rekursionen. So erhält man die Rekursionen unserer Beispiele, indem man in dem ersten Beispiel f und a als Parameter betrachtet und im zweiten den Übergang von $\varphi_n(a)$ zu $\varphi_{n+1}(a)$ als einen durch die Funktionenfunktion $\mathfrak{g}$ vermittelten Übergang von einer Funktion φ_n zu der Funktion φ_{n+1} darstellt, so daß a in der Rekursion gar nicht als Parameter aufgefaßt wird. Die Erweiterung der Art der Rekursion in unseren beiden Beispielen gegenüber der elementaren Rekursion besteht darin, daß wir einmal einen höheren Parameter, der keine gewöhnliche ganze Zahl ist, einführen und das andere Mal für $\mathfrak{a}$ eine Funktion und für $\mathfrak{g}$ eine Funktionenfunktion wählen.

Die Variablentypen bilden das Bindeglied, durch welches die Zuordnung der Funktionen einer Zahlenvariablen zu den Zahlen der zweiten Zahlklasse ermöglicht wird. In der Tat gelangen wir zu einer solchen Zuordnung zwischen den Zahlen der zweiten Zahlklasse und gewissen Variablentypen, wenn wir die beiden Erzeugungsprozesse für die Zahlen der zweiten Zahlklasse, nämlich den Prozeß des Eins-Addierens und den Limesprozeß bei abzählbarer Folge mit dem Aufsteigen der Variablentypen nach ihrer Höhe vergleichen. Wir wollen dem Prozeß des Eins-Addierens das Funktionen-Nehmen, d. h. das Einsetzen eines vorhandenen Variablentyps als Argument in eine Funktion, und dem Limesprozeß die Zusammenfassung der abzählbaren Folge eines Variablentyps zu einem neuen Variablentyp entsprechen lassen und die auf diese Weise den Zahlen der zweiten Zahlklasse entsprechenden Variablentypen speziell als *Z-Typen* bezeichnen: bei der Bildung der Z-Typen werden also — außer den logischen Verknüpfungsprozessen — lediglich die gewöhnlichen (nicht transfiniten) Rekursionen angewandt, gerade wie sie zur Abzählung der Typenfolgen jedesmal als Vorbereitung des Limes-Prozesses notwendig sind. Wenn wir diese Z-Typen nach ihrer Höhe ordnen, so entsprechen umkehrbar eindeutig den Zahlen der zweiten Zahlklasse die Variablentypen einer bestimmten Höhe.

Damit aber gelangen wir auch zu einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung der mittels der Z-Typen definierten Funktionen zu den Zahlen der zweiten Zahlklasse. Um dies einzusehen, genügt folgende Überlegung. Wenn wir Variablentypen nur bis zu einer bestimmten Höhe zugrunde legen und dann allein mit den Mitteln der Einsetzung und Rekursion Funktionen bilden, so erhalten wir stets nur abzählbarviele Funktionen. Diese Abzählung kann auch auf strenge Weise formalisiert werden und zwar in der Weise, daß man zunächst eine Rekursionsfunktion ϱ herstellt, welche alle in Betracht kommenden Rekursionen umfaßt und die infolgedessen einen Parameter enthält, der die bis dahin zugelassenen Variablentypen überschreitet. Die Definition von ϱ ist eine Anwendung des allgemeinen Rekursionsschemas, bei der jener höhere Variablentyp wesentlich benutzt wird. Nunmehr ordnet man die in Betracht kommenden Spezialisierungen der in ϱ vorkommenden Variablentypen ihrer Höhe nach und hat damit die verschiedenen Ausgangseinsetzungen. Diese bringt man in eine abgezählte Reihe. Nachdem man diese Abzählung hergestellt hat, gewinnt man die zu definierenden Funktionen, indem man nach der Anzahl der vorzunehmenden Einsetzungen ordnet.

Bei der eben geschilderten Beweisführung habe ich die Theorie der Zahlen der zweiten Zahlklasse im wesentlichen vorausgesetzt. Die Zahlen der zweiten Zahlklasse wurden von mir schlechtlin als Resultat des Hinüberzählens über das abzählbare Unendlich eingeführt, und dann wurde später die Individualaussage N „Zahl der zweiten Zahlklasse sein“ durch Angabe der Axiome gekennzeichnet. Aber diese Axiome geben nur den allgemeinen Rahmen für eine Theorie. Zur genaueren Begründung derselben ist es nötig, zu ermitteln, wie der Prozeß des Hinüberzählens über das abzählbare Unendlich zu formalisieren ist. Dies geschieht, indem der Prozeß des Hinüberzählens auf eine Folge angewandt wird; diese Folge kann nur durch eine gewöhnliche Rekursion gegeben sein, und zu diesen Rekursionen sind wieder gewisse Typen notwendig.

Dieser Umstand bietet scheinbar eine Schwierigkeit, aber in Wahrheit zeigt es sich, daß gerade durch diese Überlegung das Entsprechen zwischen den Zahlen der zweiten Zahlklassen und den Funktionen einer Zahlenvariablen zu einem weit engeren gemacht werden kann. Es werden nämlich die Variablentypen, die wir zur Herstellung der Zahlen der zweiten Zahlklasse brauchen, dadurch gewonnen, daß wir formal in unseren bisherigen definierenden Typenaussagen das Zeichen Z an 'einer oder mehreren Stellen durch das Zeichen N ersetzen. Die so entstehenden Variablentypen wollen wir N-*Typen* nennen; wie ersichtlich ist, haben entsprechende Z- und N-Typen dieselbe Höhe. Wir brauchen nun nicht der einen vorliegenden Zahl der zweiten Zahlklasse die sämtlichen Funktionen derselben Höhe zuzuordnen, sondern können die Zahlen der zweiten Zahlklasse und die Funktionen sich nach der Höhe der zu ihrer Definition nötigen Variablentypen einander entsprechen lassen. Des genaueren stellt sich diese Zuordnung folgendermaßen dar:

Geht man in den Z-Typen nur bis zu einer gewissen Höhe, so ist auch die Höhe der entsprechenden N-Typen beschränkt. Aus den mit diesen Typen herstellbaren Zahlen der zweiten Zahlklasse läßt sich durch eine aufsteigende Folge eine höhere Zahl der zweiten Zahlklasse gewinnen, die mit Hilfe eines höheren Variablentyps definiert wird. Hat man andererseits N-Typen bis zu einer gewissen Höhe, so sind auch die durch die entsprechenden Z-Typen definierbaren Funktionen abzählbar: nämlich nach der Zahl der Substitutionen in der Weise, wie dies früher geschildert worden ist. Aus einer solchen Abzählung $\varphi(a, n)$ erhält man bekanntermaßen durch das Cantorsche Diagonalverfahren, z. B. durch die Bildung von $\varphi(a, a)+1$, eine von allen abgezählten Funktionen verschiedene Funktion, die demnach durch die vorher zugelassenen Variablentypen nicht definiert werden konnte.

Man hat damit die Möglichkeit erreicht, den Zahlen der zweiten Zahlklasse, welche auf der betreffenden Höhe, aber auf keiner geringeren zu definieren sind, jene abzählbar vielen auf derselben Höhe definierbaren Funktionen umkehrbar eindeutig zuzuordnen, und auf diese Weise kommt jede Funktion als Zugeordnete mindestens einer Zahl der zweiten Zahlklasse vor.

Hiermit ist aber der Beweis des Kontinuumsatzes noch nicht fertig, sondern bedarf noch einer wesentlichen Ergänzung. Wir haben nämlich bei unserer ganzen bisherigen Untersuchung zwecks Herstellung der Zuordnung in zweifacher Hinsicht beschränkende Voraussetzungen gemacht: einmal, indem unser allgemeines Rekursionsschema für ϱ nur den Fall der gewöhnlichen Rekursion zur Darstellung bringt, bei welcher die Variable, nach der die Rekursion fortschreitet, die Zahlenvariable ist, und andererseits, indem wir auch die Variablentypen auf solche beschränkten, die durch Hinüberzählen über abgezählte Folgen entstehen. An sich ist es gewiß, daß transfinite Rekursionen und dementsprechend höhere Variablentypen in mathematischen Untersuchungen z. B. für die Bildung von Funktionen reeller Variablen mit gewissen Eigenschaften notwendig gebraucht werden. Aber hier in unserem Problem, bei dem es sich um die Bildung von Funktionen einer Zahlenvariablen handelt, haben wir solche höhere Rekursionen und Variablentypen in der Tat nicht nötig; es gilt nämlich folgendes Lemma.

Lemma II. Zur Bildung von Funktionen einer Zahlenvariablen sind transfinite Rekursionen entbehrlich, und zwar reicht die gewöhnliche, d. h. nach einer Zahlenvariablen fortschreitende Rekursion nicht nur für den eigentlichen Bildungsprozeß der Funktionen aus, sondern es genügt auch, bei der Einsetzung solche Variablentypen allein anzuwenden, deren Definition nur gewöhnliche Rekursion erfordert. Oder — um uns genauer und mehr im Sinne unserer finiten Einstellung auszudrücken —: wenn unter Heranziehung einer höheren Rekursion oder eines dementsprechenden Variablentyps eine Funktion gebildet worden ist, die nur eine gewöhnliche Zahlenvariable als Argument hat, so läßt sich diese Funktion auch stets durch gewöhnliche Rekursionen und unter ausschließlicher Anwendung von Z-Typen definieren.

Den Sinn und die Tragweite dieses Lemmas kann uns folgendes typische Beispiel deutlich machen.

Denken wir uns die Zuordnung der Funktionen eines Zahlenargumentes zu den Zahlen der zweiten Zahlklasse formalisiert, dann haben wir damit auch eine bestimmte Funktion $\zeta(a, n)$, welche einer beliebigen Zahl der zweiten Zahlklasse a und der gewöhnlichen Zahl n eine gewöhnliche Zahl zuordnet — indem nämlich bei festem a und variablem n gerade $\zeta(a, n)$ die zu a zugeordnete Funktion darstellt. Setzen wir nun für a eine von n abhängige Zahl der zweiten Zahlklasse α_n ein, wobei die Folge durch gewöhnliche oder auch durch transfinite Rekursion z. B.

$$\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$$

definiert sein möge, so ist $\zeta(\alpha_n, n)$ eine Funktion einer Zahlenvariablen n; und von dieser behauptet nun unser Lemma II, daß sie sich durch gewöhnliche Rekursion mittels Z-Typen definieren läßt, während die Definition von $\zeta(a, n)$ mit diesen Mitteln jedenfalls nicht möglich ist — führt doch die gegenteilige Annahme ersichtlich auf einen Widerspruch.

Ausdrücklich möchte ich nochmals bemerken, daß die hier vorgetragene Darstellung des Beweises für den Kontinuumsatz nur die Grundgedanken enthält; zur vollkommenen Durchführung bedarf es außer den Beweisen der zwei Lemmata noch der Umarbeitung im Sinne der strengen Einhaltung der finiten Einstellung.

Zuletzt wollen wir wieder unseres eigentlichen Themas gedenken und über das Unendliche das Fazit aus allen unseren Überlegungen ziehen: Das Gesamtergebnis ist dann: das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig — eine bemerkenswerte Harmonie zwischen Sein und Denken. Im Gegensatz zu den früheren Bestrebungen von Frege und Dedekind erlangen wir die Überzeugung, daß als Vorbedingung für die Möglichkeit wissenschaftlicher Erkenntnis gewisse anschauliche Vorstellungen und Einsichten unentbehrlich sind und die Logik allein nicht ausreicht. Das Operieren mit dem Unendlichen kann nur durch das Endliche gesichert werden.

Die Rolle, die dem Unendlichen bleibt, ist vielmehr lediglich die einer Idee — wenn man, nach den Worten Kants, unter einer Idee einen Vernunftbegriff versteht, der alle Erfahrung übersteigt und durch den das Konkrete im Sinne der Totalität ergänzt wird — einer Idee überdies, der wir unbedenklich vertrauen dürfen in dem Rahmen, den die von mir hier skizzierte und vertretene Theorie gesteckt hat.

Zum Schluß möchte ich noch P. Bernays meinen Dank für die verständnisvolle Mitarbeit und wertvolle Hilfe aussprechen, die er mir insbesondere bei dem Beweise für den Kontinuumsatz sowohl in sachlicher wie in redaktioneller Hinsicht geleistet hat.

(Eingegangen am 24. 6. 1925.)